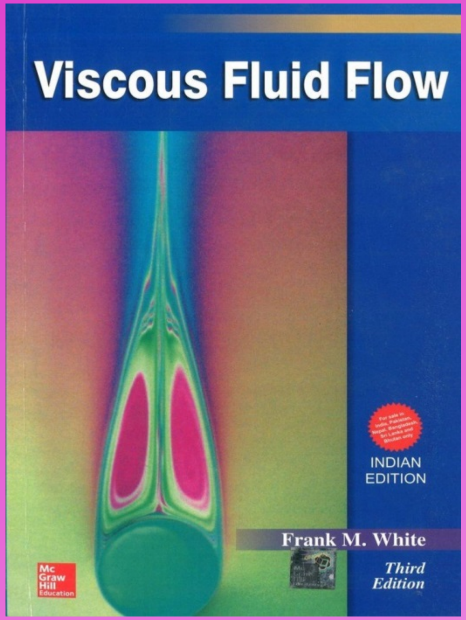


مکانیک سیالات پیشرفته

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

فصل سوم: جریان های داخلی آرام و حل های تحلیلی دقیق در مکانیک سیالات جریان آرام – بخش چهارم

کلاس درس دکتر نوروزی
خرداد ۱۴۰۰

جریان در لوله تحت گرادیان فشار نوسانی:

جریان در لوله تحت گرادیان فشار نوسانی از جمله مسائل کلاسیک در مکانیک سیالات محسوب می شود. در این جریان،فرض بر آن است که جریان توسعه یافته درون کانال تحت یک گرادیان فشار نوسانی قرار دارد و از پاسخ جریان در حالت گذرا صرف نظر می شود. و بنابراین، پاسخ تنها به صورت پریودیک (در زمان های بزرگ) خواهد بود.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$\frac{d\hat{p}}{dx} = -\rho k e^{i\omega t} \rightarrow$$ بخش حقیقی جواب فیزیکی است

در جریان‌های نیوتونی تحت گرایان فشار نوسانی، میدان سرعت و میدان تنش هم فاز با فشار نوسان می کنند.

یعنی، برای تغییر شکل های کوچک، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\hat{u}}_{\text{حقیقی}} = v(r)e^{(i\omega t+\delta)} \rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \rightarrow \text{سیال نیوتنی} \\ \delta \neq 0 \xrightarrow{(0<\delta<\frac{\pi}{2})} \text{سیال ویسکوالاستیک خطی} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\hat{u}(r,t) = v(r)e^{i\omega t}$$

در تغییر شکل های بزرگ، اختلاف فاز در $v(r)$ نهفته است.

با جایگذاری در معادله حاکم داریم:

$$\rho i\omega v e^{i\omega t} = \rho k e^{i\omega t} + \mu\left(v'' + \frac{1}{r}v'\right)e^{i\omega t}$$

به عبارت دیگر، عدم هم فاز بودن جریان، مربوط به تغییر شکل های بزرگ است.

$$v'' + \frac{1}{r}v' - \frac{i\omega}{\nu}v = \frac{-k}{\nu}$$

$$v = v_g + v_p$$

جواب عمومی ← v_g v_p → جواب خصوصی

$$v_g'' + \frac{1}{r}v_g' - \frac{i\omega}{\nu}v_g = 0$$

$$\frac{d}{dr}(rv_g') - \frac{i\omega}{\nu}rv_g = 0$$

$$\alpha = 1, \gamma^2 = \frac{-i\omega}{\nu}, \beta = 1$$

ضرایب بسل : $\nu = \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha+2} = 0, \mu = \frac{2}{\beta-\alpha+2} = 1, \frac{\nu}{\mu} = 0$

$$v_g = C_1 J_0\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}}r\right) + C_2 Y_0\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}}r\right)$$

جهت اجتناب از شرایط singular در r=0، داریم:

$$C_2 = 0$$

در نتیجه:

$$v_g = C_1 J_0\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}}r\right)$$

چون سمت راست معادله (ترم ناهمگن) عدد ثابت است، بنابراین v_p نیز ثابت خواهد بود:

$$-\frac{i\omega}{\nu}v_p=\frac{-k}{\nu}\rightarrow v_p=\frac{k}{i\omega}$$

$$\hat{u}(r,t)=\left\{C_1J_0\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}}r\right)+\frac{k}{i\omega}\right\}e^{i\omega t}$$

$$at:r=r_0\rightarrow\hat{u}(r_0,t)=0\rightarrow C_1=\frac{-\frac{k}{i\omega}}{J_0\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}}r_0\right)}$$

در نهایت، داریم:

$$\hat{u}(r,t)=\frac{k}{i\omega}e^{i\omega t}\left\{1-\frac{J_0(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}}r)}{J_0(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}}r_0)}\right\}$$

- یافتن u(r,t) از طریق تعیین بخش حقیقی عبارت فوق صورت می گیرد. متاسفانه حل دقیق بسته ای برای u(r,t) وجود ندارد و تعیین آن، به صورت عددی انجام می شود.

- در حالات خاص، یافتن پاسخ تحلیلی برای معادله فوق متصور است:

برای تابع بسل :

$$\begin{cases} z<2\rightarrow J_0(z)\approx 1-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{64}-\ldots \\ z>2\rightarrow J_0(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z-\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

با در نظر گرفتن $r^* = \frac{r}{r_0}, \omega^* = \frac{\omega r_0^2}{\nu}, u^* = \frac{u}{u_{max}}$ که $u_{max} = \frac{k r_0}{4\nu}$ سرعت خط مرکز جریان پوازیه

با گرادیان فشار ثابت $-\rho k$ است، داریم:

برای $\omega^* < 4$:

معادله (۱)

$$\frac{u}{u_{max}} \approx (1 - r^{*2}) \cos(\omega t) + \frac{\omega^*}{16}(r^{*4} + 4r^{*2} - 5)\sin(\omega t) + o(\omega^{*2})$$

برای $\omega^* > 4$:

معادله (۲)

$$\frac{u}{u_{max}} \approx \frac{4}{\omega^*}\left[\sin(\omega t) - \frac{e^{-B}}{\sqrt{r^*}}\sin(\omega t - B)\right] + O(\omega^{*-2})$$

که در این روابط، $B = (1 - r^*)\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}$ است.

توجه :

- مطابق معادله (1)، در ω^* های بسیار کوچک، جریان به صورت یک جریان پوازیه و هم فاز با گرادیان فشار است.

- جملات بعدی معادله (1)، معرف اختلاف فاز جریان هستند و در مرکز لوله $u < u_{\max}$ است.

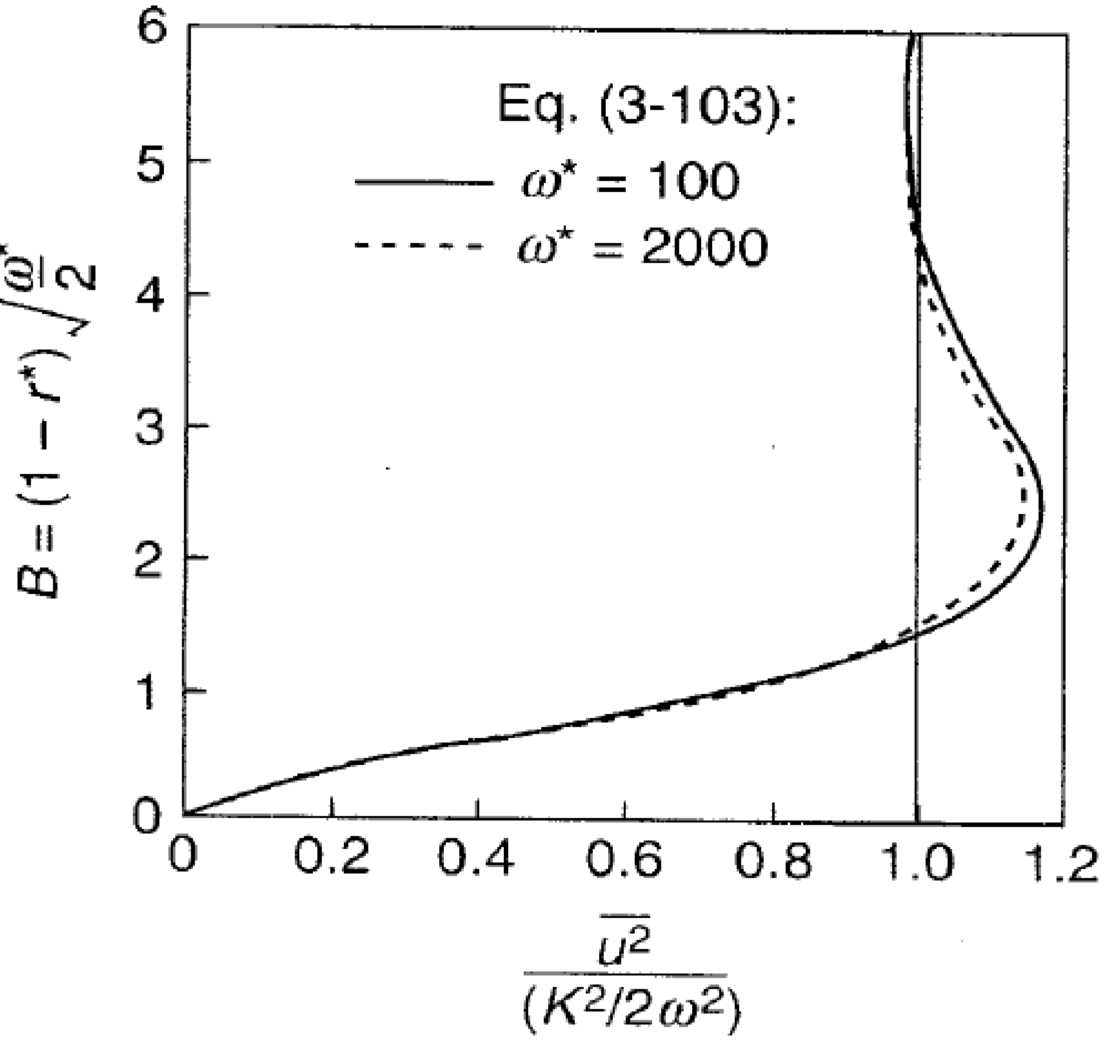
- مطابق معادله (2)، جریان تقریبا 90° از گرادیان فشار در ω^* های بزرگ بسیار عقب تر است.

- معادله (2) عمدتا در نزدیکی دیواره لوله صادق است. مطابق معادله (2) در ω^* خیلی بزرگ مقدار u از $u_{\max}$ کمتر است. $(u < u_{\max})$

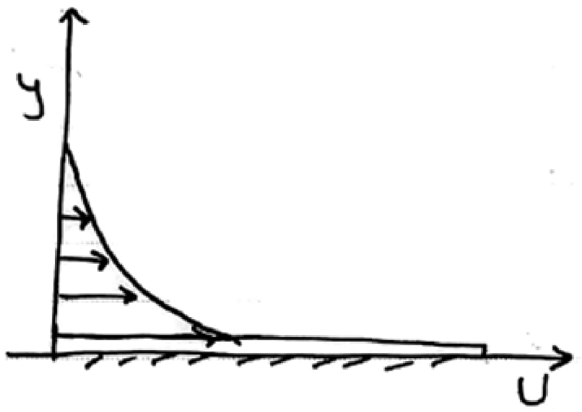
- طبق معادله (2)، یک ناحیه پر سرعت نزدیک دیواره وجود دارد. (اثر حلقه ریچاردسون).

- با متوسط گیری rms نسبت به زمان داریم (برای یک سیکل (متوسط زمانی)):

$$\frac{\bar{u}^2}{k^2 / 2\omega^2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{r^*}} \exp(-B) \cos \beta + \frac{e^{-2B}}{r^*}$$



در نزدیکی دیواره



مساله اول استوکس: حرکت یک صفحه در محیط بی نهایت

- در مساله استوکس، جریان تنها تحت تاثیر نفوذ است.

- این مسئله، یک مسئله غیر دائمی محسوب می شود.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

با فرض بی نهایت بودن طول صفحه، می توان از مشقات در جهت x و سرعت در جهت y صرف نظر کرد:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u=u(t,y)$$

$$B.C.\begin{cases} at: y=0 \Rightarrow u=U \\ at: y\rightarrow\infty \Rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$I.C.\{at: t=0 \Rightarrow u=0$$

روش های حل:

1- روش کلاسیک: تبدیل فوریه سینوسی نیمه متناهی، تبدیل لاپلاس و ...

2- روش ابتکاری (روش خود تشابهی)

در روش خود تشابهی، سعی بر این است که با ترکیب متغیر ها، متغیر جدیدی ارائه شود که بتواند نقش دو متغیر (متغیر های) دیگر را ایفا کند و به نحوی از عهده شرایط مرزی بر آید و معادله مشتقات جزئی را به یک معادله مرتبه ای، تقلیل دهد.

با تعریف متغیر η به صورت زیر، داریم:

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} = \frac{y}{2\sqrt{\nu}} t^{-1/2}$$

توجه: در $y = 0$ و $t = 0$ ، متغیر η بی نهایت می شود (شروط معادل هم ارزند).

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{du}{d\eta}\times\frac{-1}{2}\frac{y}{2\sqrt{\nu}}t^{-3/2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{du}{d\eta}\times\frac{t^{-1/2}}{2\sqrt{\nu}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{d}{d\eta}(\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2 u}{d\eta^2}\frac{t^{-1/2}}{2\sqrt{\nu}}\frac{1}{2\sqrt{\nu}}t^{-1/2}=\frac{d^2 u}{d\eta^2}\frac{t^{-1}}{4\nu}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rightarrow\frac{-1}{4}\frac{y}{\sqrt{\nu}}t^{-3/2}\frac{du}{d\eta}=\nu\frac{t^{-1}}{4\nu}\frac{d^2 u}{d\eta^2}$$

$$-\frac{y}{\sqrt{\nu}}t^{-1/2}\frac{du}{d\eta}=\frac{d^2 u}{d\eta^2}\rightarrow\frac{d^2 u}{d\eta^2}+2\eta\frac{du}{d\eta}=0$$

$$\frac{du}{d\eta}=f \rightarrow f'+2\eta f=0$$

فاکتور انتگرال : $e^{\int 2\eta d\eta}=e^{\eta^2}$

$$e^{\eta^2}f'+2\eta e^{\eta^2}f=0 \rightarrow \frac{d}{d\eta}(e^{\eta^2}f)=0$$

$$e^{\eta^2}f=C_1 \rightarrow \frac{du}{d\eta}=C_1e^{-\eta^2}$$

تابع خطا : $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^{*2}}dt^* \Rightarrow \int_0^x e^{-t^{*2}}dt^*=\frac{\sqrt{\pi}}{2}erf(x)$

تابع خطا، انتگرال تابع توزیع چگالی گوسین است.

$$\frac{du}{d\eta} = C_1 e^{-\eta^2} \rightarrow u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} C_1 erf(\eta) + C_2$$

$$B.C.\begin{cases} at : \eta = 0 \xrightarrow[t \to \infty]{y=0} u = U \\ at : \eta \to \infty \xrightarrow[t=0]{y \to \infty} u = 0 \end{cases}$$

توجه:

$$\begin{cases} erf(0) = 0 \\ erf(\infty) = 1 \end{cases}$$

در نتیجه:

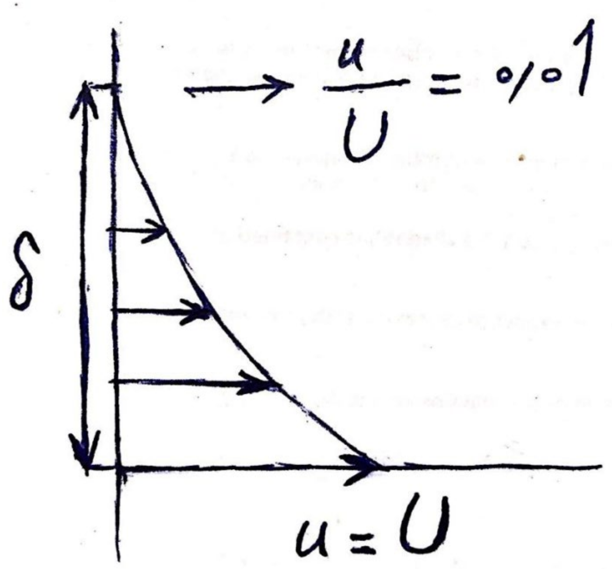
$$at : \eta \to 0 \to u = U \Rightarrow C_2 = U$$

$$at : \eta \to \infty \to u = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} C_1 + U = 0 \to C_1 = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} U$$

$$u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{-2}{\sqrt{\pi}}U erf(\eta) + U \rightarrow \frac{u}{U} = 1 - erf(\eta)$$

$$1 - erf(x) = erfc(u) \rightarrow \frac{u}{U} = erfc(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}})$$

- در مساله اول استوکس، عمق نفوذ از رابطه تقریبی $\delta \approx 3.64\sqrt{\nu t}$ بدست می آید (عمق نفوذ از تعریف لایه مرزی تبعیت می کند(تقریب ٪1)).



مساله دوم استوکس:

در مسئله دوم استوکس، به دنبال یافتن پاسخ میدان جریان در یک صفحه نوسانی در محیط بی نهایت هستیم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\hat{u}=f(y)e^{i\omega t}$$

$$at: y=0\rightarrow\hat{u}=Ue^{i\omega t}$$

$$i\omega f e^{i\omega t}=\nu f'' e^{i\omega t}\rightarrow f''-\frac{i\omega}{\nu}f=0$$

$$\rightarrow r^2-\frac{i\omega}{\nu}=0\rightarrow r=\pm\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}$$

$$\begin{cases} i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}\rightarrow i^{\frac{1}{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}} \\ i^{\frac{1}{2}}=\sqrt{i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

چنانچه از تغییر متغیر $\eta = y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$ استفاده کنیم، داریم:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^{2} C_j e^{\pm\eta} e^{\pm i\eta} e^{i\omega t} = \sum_{j=1}^{2} C_j e^{\pm\eta} e^{i(\omega t \pm \eta)}$$

با توجه به فیزیک جریان، جمله $+\eta$ نمی تواند یک پاسخ فیزیکی باشد (در بی نهایت سرعت صفر است).
بنابراین، ضریب این جمله باید صفر باشد.

داریم:

$$\hat{u} = Ce^{-\eta} e^{i(\omega t - \eta)}$$

برای یافتن پاسخ فیزیکی نهایی، باید بخش حقیقی $\hat{u}$ را ملاک قرار دهیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$u = Ce^{-\eta}\cos(\omega t - \eta)$$

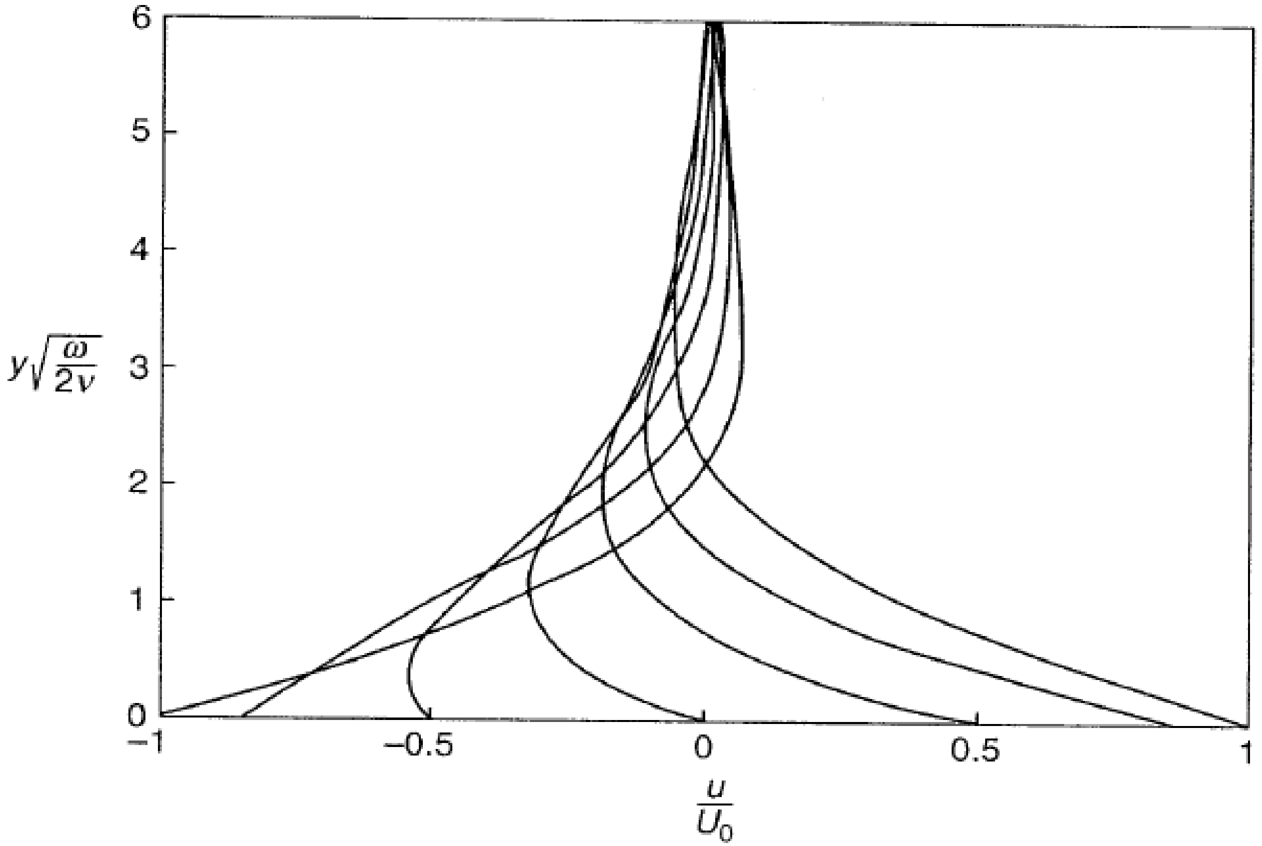
$$at: y = 0 \rightarrow u = U\cos(\omega t)$$

از آنجا که $y = 0$ معادل $\eta = 0$ است، بنابراین:

$$C = U$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow u = Ue^{-\eta}\cos(\omega t - \eta)$$



$$\delta \approx 6.5\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$$: در اینجا با معیار 1٪

از رابطه فوق مشخص است که سرعت دارای یک اختلاف فاز نسبت به سرعت دیواره است که این اختلاف فاز در هر نقطه به y و همچنین ω و ν وابسته است.


The End